2 Aufgaben zum Kapitel Strömungsmechanik

2.2 Konzepte

Review–Aufgaben

Aufgabe 1. Was versteht man unter den Betrachtungsweisen nach Lagrange und Euler?

Aufgabe 2. Wie sind Stromlinien definiert?

Aufgabe 3. Wieso sind Stromlinien nicht notwendigerweise die Bahnen, auf denen sich Fluidpartikel bewegen?

Aufgabe 4. Was versteht man unter der materiellen Ableitung und wie wird sie definiert?

Übungsaufgaben

Aufgabe 5. Skizzieren Sie die Stromlinien der Strömung

$$u = \alpha x, \quad v = -\alpha y, \quad w = 0,$$

wobei α eine positive Konstante ist.

Es sei

$$c(t, x, y) = \beta x^2 y e^{-\alpha t}$$

die Konzentration eines Schadstoffes im Fluid für $y > 0$, wobei β konstant ist. Ändert sich die Schadstoffkonzentration eines bestimmten Fluidpartikels mit der Zeit?

Aufgabe 6. Gegeben sei eine instationäre Strömung durch

$$u = u_0, \quad v = kt, \quad w = 0,$$

wobei u_0 und k positive Konstanten sind.

a) Skizzieren Sie die Stromlinien zu zwei unterschiedlichen Zeiten und zeigen Sie, dass sie Geraden sind.

b) Zeigen Sie, dass jedes Fluidteilchen eine parabolische Bewegung mit der Zeit t ausübt.

2.3 Ideales Fluid

Review–Aufgaben

Aufgabe 7. Was sind die definierenden Eigenschaften eines idealen Fluids?

Aufgabe 8. Wie lauten die Euler–Gleichungen für ein ideales Fluid?

Aufgabe 9. Wie lautet der Stromlinien–Satz von Bernoulli? Wie vereinfacht sich dieser Satz für eine rotationsfreie Strömung?

Aufgabe 10. Was ist die Definition der Wirbelstärke (Vorticity)?

Aufgabe 11. Wie lautet die Vorticity equation? Welche Konsequenzen hat sie für

- eine zweidimensionale Strömung eines idealen Fluids?
- eine zweidimensionale stationäre Strömung, auf die als äußere Kraft nur konservative Volumenkräfte angreifen?

Übungsaufgaben

Aufgabe 12. Rechnen Sie die Formel (siehe (V.9))

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla(\frac{1}{2}\mathbf{u}^2)$$

nach, die für die Umformung der Euler–Gleichung in die Form

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + \chi \right)$$

verwendet wurde.

Aufgabe 13. Ein idelaes Fluid rotiert mit einer Winkelgeschwindigkeit Ω um die z–Achse, d.h. $\mathbf{u} = (-\Omega y, \Omega x, 0)^T$ und ist der Gravitationsbeschleunigung g (in negative y–Richtung) ausgesetzt. Das Ziel ist es, Oberflächen mit konstantem Druck zu finden, und damit die Oberfläche von rotierendem Wasser (z.B. in einer Tasse), da ja an der Wasseroberfläche der Atmosphärendruck herrscht.

Mit „Bernoulli“ gilt

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + gz = \text{const.}$$

Damit kann man die Äquipotentialflächen des Drucks sofort berechnen zu

$$z = \text{const} - \frac{\Omega^2}{2g}(x^2 + y^2).$$

Diese Formel sagt, dass die Höhe der Wasseroberfläche mit dem Abstand zur z–Achse abnimmt, was aus unserer Erfahrung nicht stimmt.

a) Was ist an der obigen Argumentation falsch?

b) Lösen Sie die Aufgabe richtig, indem Sie die Euler–Gleichung in Komponenten schreiben und nach dem Druck integrieren. Leiten Sie daraus die korrekte Gestalt der Wasseroberfläche ab.

Aufgabe 14. Das Strömungsverhalten eines Rankine–Vortex ist (in Zylinderkoordinaten) gegeben durch

$$u_\varphi = \begin{cases} \Omega r, & r \le a \\ \dfrac{\Omega a^2}{r}, & r > a \end{cases}$$

und $u_r = u_z = 0$.

a) Skizzieren Sie u_φ und die Wirbelstärke als Funktion von r.

b) Berechnen Sie den Druck innerhalb und außerhalb des Kerns eines Rankine–Vortex. Zeigen Sie, dass der Druck bei $r = 0$ um $\rho\Omega^2 a^2$ kleiner ist als bei $r = \infty$. (Daher der kleine Druck im Zentrum eines Tornados)

c) Nehmen Sie nun an, dass eine freie Oberfläche des Fluids vorhanden ist, und das die Erdbeschleunigung herrscht (Teetasse, allerdings mit unendlichem Radius). Zeigen Sie, dass die Oberfläche bei $r = 0$ um die Höhe $\Omega^2 a^2/g$ tiefer ist als bei $r = \infty$.

Aufgabe 15. Leiten Sie aus der Euler–Gleichung für ein inkompressibles Fluid mit konstanter Dichte die Energie–Gleichung her:

$$\frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{2}\rho\mathbf{u}^2 dV = -\int_A (p + \rho\chi + \frac{1}{2}\rho\mathbf{u}^2)\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}dA$$

Hierbei ist V ein ortsfestes Gebiet, das von A berandet ist, und χ ist das Potential der Gravitationsbeschleunigung $\mathbf{g}$, also $\mathbf{g} = -\nabla\chi$.

2.4 Potential Flow

Review–Aufgaben

Aufgabe 16. Was sind die Voraussetzungen für „Potential Flow“?

Aufgabe 17. Wie hängt das Geschwindigkeitspotential Φ und die Strömungsgeschwindigkeit zusammen?

Aufgabe 18. Wie hängen die stream function und die Strömungsgeschwindigkeit zusammen?

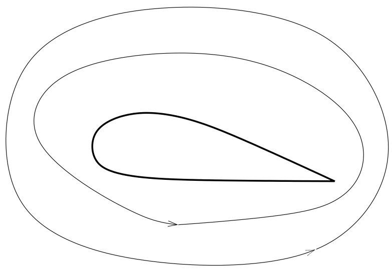
Übungsaufgaben

Aufgabe 19.

Zeigen Sie: Die Zirkulation

$$\Gamma = \oint_S \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}$$

für eine rotationsfreie Strömung um das 2d–Tragflächenprofil ist gleich für alle möglichen Pfade S.



Aufgabe 20. Zeigen Sie:

a) In einem einfach zusammenhängenden Gebiet mit einem rotationsfreien Strömungsfeld $\mathbf{u}$ ist das Integral

$$\Phi = \int_O^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}$$

unabhängig von Pfad, der von O nach P führt.

b) In einem zweidimensionalen einfach zusammenhängenden Gebiet mit dem Strömungsfeld eines inkompressiblen Fluids $\mathbf{u} = (u, v)^T$ ist der Wert des Integrals

$$\Psi = \int_O^P u\; dy - v\; dx$$

unabhängig vom Pfad der von O nach P führt. Damit kann dieses Integral als Definition der strem function dienen.

Aufgabe 21. Gegeben sei das Strömungsfeld ($Q = \text{const} \neq 0$)

$$u_r = \frac{Q}{2\pi r}, \quad u_\varphi = 0.$$

Zeigen Sie, dass für $r \neq 0$ gilt

$$\nabla \times \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

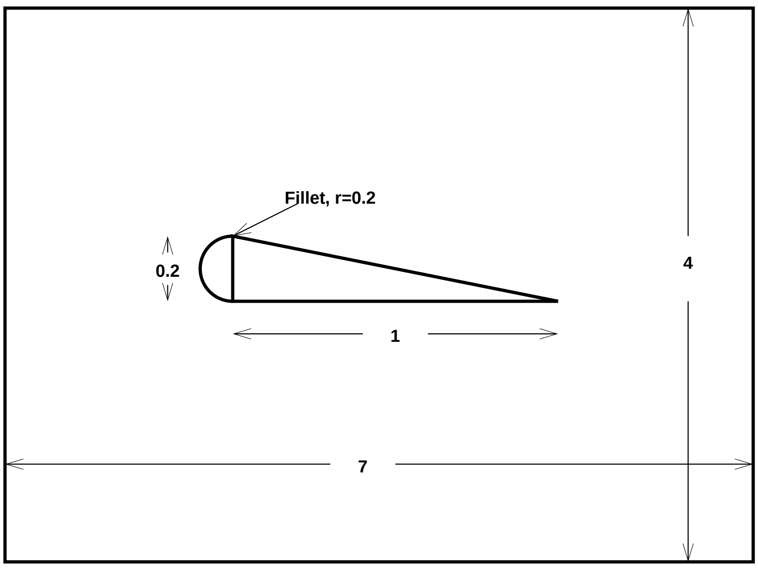
und finden Sie ein Geschwindigkeitspotential und eine stream function.

Modellierung und Simulation

Aufgabe 22. In dieser Aufgabe soll der Auftrieb auf ein einfaches umströmtes Profil mit potential flow untersucht werden. Starten Sie hierzu mit Femlab

```
New->2d
Femlab->PDE Modes->Classical PDEs->Laplace's equation
```

und definieren Sie `Phi` als dependent variable. Die folgende Abbildung zeigt, mit welcher Geometrie Sie starten sollen.



Zeichnen Sie ein Dreieck und einen Halbkreis, verschmelzen Sie die beiden Flächen und runden Sie mit `Draw->Fillet` die obere Ecke ab. Wählen Sie folgende Randbedingungen: Am oberen und unteren Rand des Rechtecks, sowie an den Profilkanten wählen Sie eine homogene Neumann–Randbedingung. An der linken Kante des Rechtecks strömt das Fluid mit der Geschwindigkeit $u = 1$ ein, also eine inhomogene Neumann–Bedingung. An der rechten Kante wählene Sie eine homogene Dirichlet–Randbedingung. Wählen Sie unter

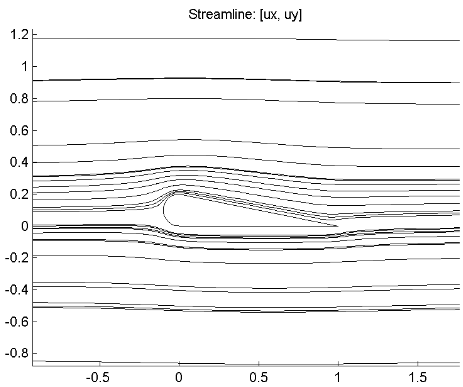
`Options->Expressions->Scalar Expressions`

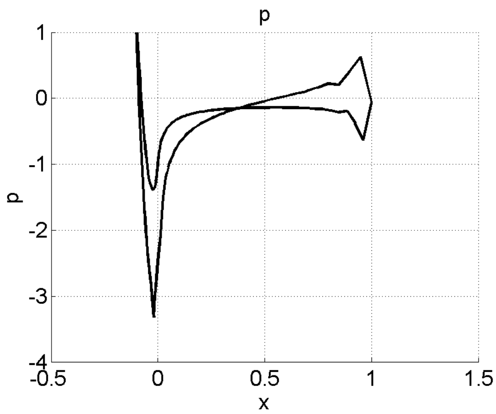
die Größe `ux` zu `Phix` und `uy` zu `Phiy`. Starten Sie die Simulation und betrachten Sie das Strömungsbild.

Wir interessieren uns für den Druckverlauf um das Profil. Dazu definieren wir eine neue Expression `p`. Mit Bernoulli definieren wir `p` zu `1-(ux^2+uy^2)`. Wir ignorieren also die potentielle Energie, und beziehen den Druck auf den Druck des einströmenden Fluids. Ein Bild des Drucks um das Profil erhalten Sie mit

`Postprocessing->Domain Plot Parameters->Line/Extrusion`

Selektieren Sie den Rand des Profils, wählen Sie `p` als Expression und `x` als x–axis Data. Wir erhalten ein Stromlinienbild und einen Druckverlauf, die ungefähr so aussehen:





Man sieht hier einerseits, dass im Strömungsbild noch ein „Knick“ im hinteren Bereich ist, und dass andererseits der Druckverlauf keinen oder kaum Auftrieb erzeugt. Diese Lösung widerspricht nämlich der Hypothese von Kutta–Joukowsky. Nach ihr müsste sich nämlich die Strömung glatt entlang der hinteren Kante strömen.

Um das zu erreichen, wird noch die Differentialgleichung für die stream function gelöst. In Femlab geht man hierzu wie folgt vor:

```
Multiphysics->Model Navigator
Femlab->PDE Modes->Classical PDEs->Laplace's equation
```

Dependent variables auf `Psi` setzen, und `Add` auswählen. Als Randbedingungeg für diesen zweiten Mode wählen Sie an den Rechteckkanten eine Dirichlet–Bedingung mit Wert 0, und an den

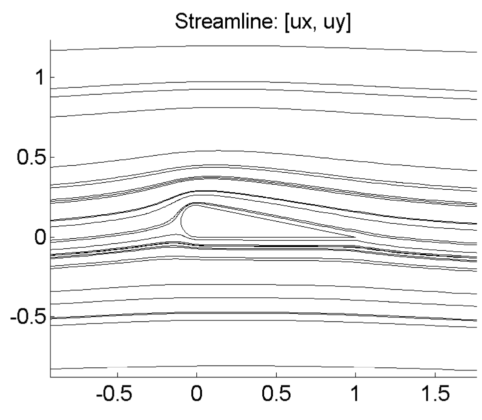
Kanten des Profils eine Dirichlet–Bedingung mit Wert 1. Wenn man die Stromlinien darstellt in der Interpretation $u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$ und $v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, erhält man Linien, die um das Profil kreisen. Jetzt muss aus beiden Lösungen eine geeignete Linearkombination hergestellt werden, die die Bedingung von Kutta–Joukowsky erfüllt. Setzen Sie dazu:

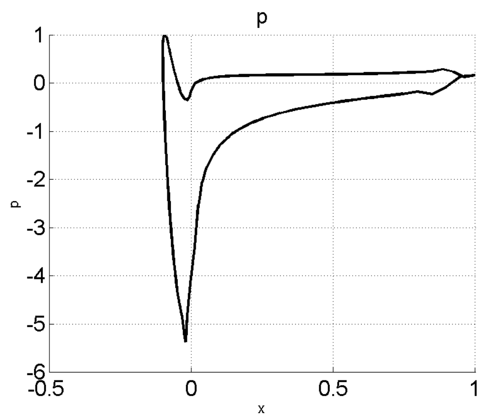
```
Options->Constants...
```

und definieren Sie eine Konstante `fac`, zunächst mit dem Wert 0. Modifizieren Sie die Scalar Expressions in folgender Weise:

```
ux: Phix + fac*Psiy
uy: Phiy - fac*Psix
```

Nun können Sie mit dem Parameter `fac` spielen, bis das Stromlinienbild für `ux` und `uy` richtig aussieht. Für ein geeignetes `fac` erhält man dann einen Stromlinienverlauf und einen Druckverlauf der folgenden Gestalt:





2.5 Navier–Stokes–Gleichung

Review–Aufgaben

Aufgabe 23. *(Indexnotation)*

Was ist mit folgenden Audrücken gemeint:

a) $f_{,i}$

b) $v_{i,i}$

c) $f_{,i,i}$

d) $\sigma_{ij,j}$

Aufgabe 24. Wie sieht der Cauchysche Spannungstensor aus? Welche Bedeutung haben seine Komponenten?

Aufgabe 25. Durch welches konstitutive Gesetz wird ein newtonsches Fluid beschrieben?

Aufgabe 26. Wie lautet die Navier–Stokes–Gleichung für ein inkompressibles newtonsches Fluid?

Aufgabe 27. Was ist die (dynamische) Viskosität η, was ist die kinematische Viskosität ν, wie hängen sie zusammen, welche Einheiten haben sie?

Aufgabe 28. Wie ist die Reynoldszahl Re definiert? Welche Bedeutung hat sie? Was ist die kritische Reynoldszahl (für technische Anwendungen)?

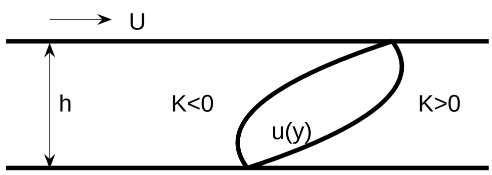
Aufgabe 29. Welche Typen von Randbedingungen haben wir für strömungsdynamische Berechnungen kennengelernt?

Übungsaufgaben

Aufgabe 30. Das Volumen V eines Fluids ist den deviatorischen Spannungen σ_{ij} und dem Druck p ausgesetzt. Ferner wirkt die Erdbeschleunigung $\mathbf{g} = (0, 0, -g)^T$ auf das Fluid. Berechnen Sie die gesamte Kraft, die auf das Fluidvolumen wirkt.

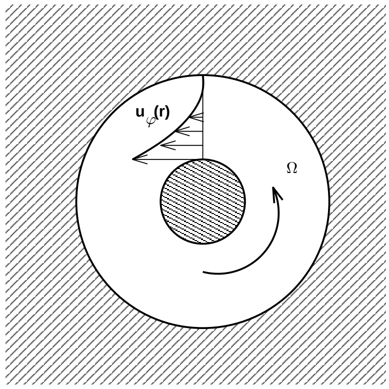
Aufgabe 31. *(Couette–Poiseuille–Strömung)*

Berechnen Sie das Strömungsprofil $u(y)$ einer laminaren Strömung zischen zwei unendlich großen Platten mit Abstand h, wenn sich die obere Platte mit der Geschwindigkeit U bewegt, und $K = -\partial p/\partial x$.



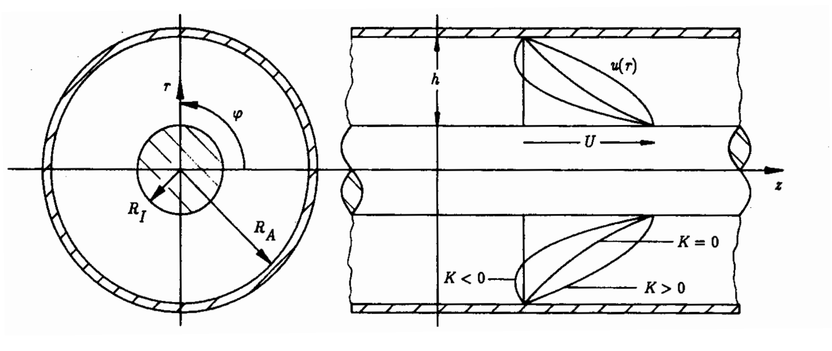
Aufgabe 32. *(Strömung zwischen zwei konzentrisch rotierenden Zylindern)*

Berechnen Sie das Geschwindigkeitsprofil $u_\varphi(r)$ einer Strömung zwischen zwei konzentrischen rotierenden Zylindern (unendlich lang) mit Radien r_i ud r_a, wenn sich der innnere Zylinder mit Winkelgeschwindigkeit Ω dreht. Berechnen Sie auch das bremsende Drehmoment, das durch die Scherspannungen pro Länge l auf den inneren Zylinder wirkt.



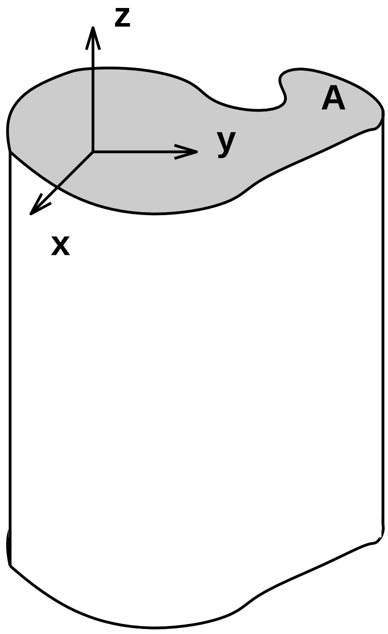
Aufgabe 33. *(Verallgemeinerte Hagen–Poiseuille–Strömung)*

Eine runde Welle mit Radius R_I (unendlich lang) beweget sich mit der Geschwindigkeit U in z–Richtung in einem unendlich langen Zylinder mit Innenradius R_A. Dazwischen findet eine laminare Schichtenströmung eines inkompressiblen newtonschen Fluids mit Viskosität η statt. Berechnen Sie das sich einstellende Strömungsprofil $u(r)$ bei gegebenem Druckgradient $K = -\partial p/\partial z$.



Aufgabe 34.

Durch welche Dfferentialgleichung mit welchen Randbedingungen wird das Strömungsprofil $w(x, y)$ einer laminaren Strömung (inkompressibel, Newtonsches Fluid) in einem unendlich langen geraden Rohr mit konstanter Querschnittsfläche A beschrieben? Gegeben sei wieder der Druckgradient $K = -\partial p/\partial z$.

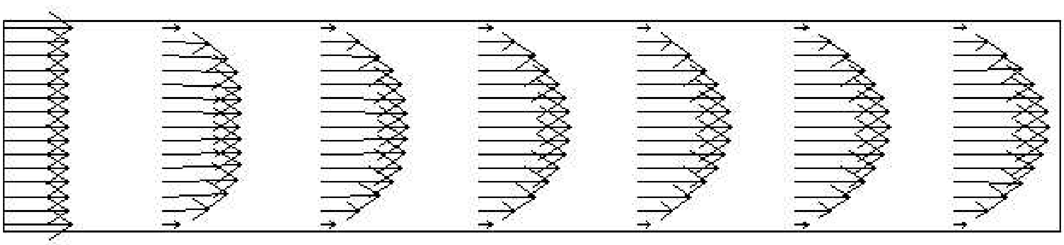


Modellierung und Simulation

Aufgabe 35. Eine Faustformel besagt, dass eine stationäre Strömung, die laminar in ein Rohr mit Durchmesser d einströmt, nach der Länge

$$l_E = \frac{\mathrm{Re}}{32} d$$

das stationäre parabelförmige Strömungsprofil angenommen hat.

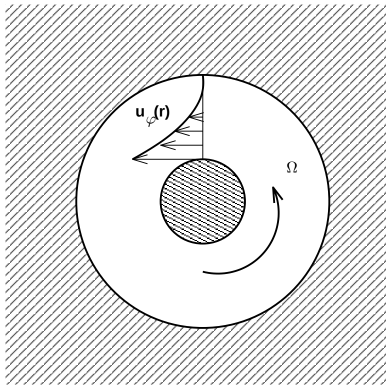


Überprüfen Sie diesen Sachverhalt durch eine Femlab–Simulation. Das Rechengebiet ist ein zweidimensionaler Kanal mit Länge $l = 2$ und Höhe $d = 0.4$. Als Fluid–Eigenschaften wählen Sie $\rho = 1$ und $\eta = 1$. Wählen Sie am linken Rand die konstante Einströmgeschwindigkeit $U = 200$, am rechten Rand einen Outflow mit Druck $p = 0$ und oben und unten die no–slip–Randbedingung.

Erzeugen Sie einen Cross–Section–Plot der Strömungsgeschwindigkeit entlang der Symmetrieachse. Vergleichen Sie das Simulationsergebnis mit Ihrem Resultat für l_E.

Aufgabe 36. In Aufgabe 32 wurde das Strömungsprofil und das Drehmoment berechnet, das auf einen rotierenden Zylinder wirkt.

Simulieren Sie folgende Situation mit Femlab (2D): Eine Zylinder mit Radius $r_i = 2.5$ mm rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega = 1000$ rad/s in einem Zylinder mit Radius $r_a = 5$ mm. Dazwischen ist eine Newtonsche Flüssigkeit (Silikonöl) mit Dichte $\rho = 1000 \mathrm{kg/m}^3$ und Viskosität $\eta = 1$Pa s.



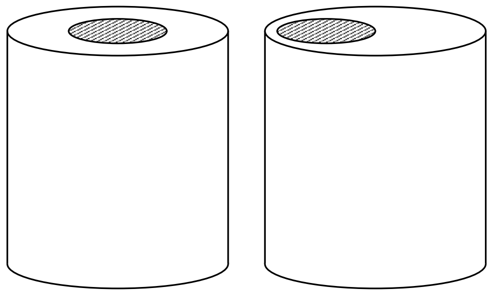
a) Simulieren Sie diese Sitatuation als zweidimensionales Problem mit Femlab. Die Randbedingungen sind: außen: no slip, innen: die Strömungsgeschwindigkeit ist durch Ω bestimmt, d.h. `u0 = -y*Omega` und `v0 = x*Omega`. An irgend einem Punkt muss noch mit Point Settings der Druck fixiert werden.

b) Berechnen Sie mit `Postprocessing->Boundary Integration` das Drehmoment, das pro Länge auf den rotierenden Zylinder wirkt, und vergleichen Sie dieses Resultat mit dem Ergebnis aus Aufgabe 32.

c) Wie ändert sich das Drehmoment, wenn der innere Zylinder exzentrisch angeordnet ist? Lösen Sie diese Aufgabe mit einer weiteren Femlab–Simluation, indem Sie den äußeren Zylinder verschieben, und zwar um 2 mm.

d) Eine (optionale) Übung für die Automatisierung von Femlab mit m–Files ist die folgende: Führen Sie eine Parameterstudie durch: Variieren Sie Ω von 0 rad/s bis 1000 rad/s und die Exzentrizität von 0 mm bis 2.2 mm und berechnen Sie das jeweilige Bremsmoment pro Länge auf den inneren Zylinder.

Aufgabe 37. In dieser Aufgabe soll untersucht werden, wie sich der Strömungswiderstand in einem Stoßdämfer ändert, wenn der Kolben aus der zentrischen Lage verschoben ist.



a) Verwenden Sie als Radius des Kolbens $r_i = 2.5$ mm und Radius des äußeren Zylinders $r_a = 5$ mm, und für das Fluid die Materialpamaterer $\rho = 1000\text{kg/m}^3$ und $\eta = 1\text{Pa s}$. Durch die Annahme, dass die Zylinder unendlich lang sind, kann das Problem zweidimensional behandelt werden. Die zugehörige Differentialgleichung kennen Sie aus der Lösung der Aufgabe 34. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass an allen Rändern die Fluidgeschwindigkeit null ist. Berechnen Sie also — für den Fall, dass der Kolben im Zentrum positioniert ist — den Durchfluss V (in m^3/s) bei gegebenem Druckgradient $K = -\partial p/\partial z = 1$ Pa/m.

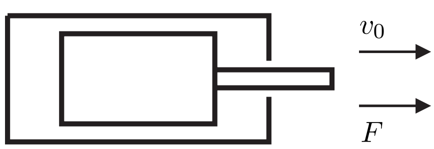
b) Lösen Sie nun das Problem durch Simluation des zweidimensionalen Problems mit Femlab und vergleichen Sie das Resultat (hierzu benötigen Sie eine `Subdomain Integration`) mit dem Resultat aus Aufgabe a).

c) Verschieben Sie nun den Kolben um 1 mm und berechnen Sie mit Femlab den Druchfluss bei gegebenem Druckgradient.

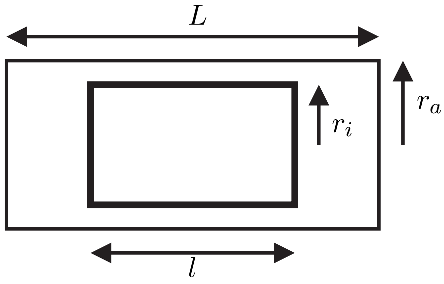
c) Hier können Sie wieder eine Parameterstudie (automatisiert) durchführen und die Resultate bei Verschiebung des Kolbens um $d = 0 \ldots 1.2$ mm berechnen.

Aufgabe 38.

Untersucht werden soll ein Flüssigkeitsstoßdämpfer. Er ist gefüllt mit einem Öl mit der Dichte $\rho = 1000$ kg/m^3 und Viskosität $\eta = 1$ Pa s. Untersucht werden soll die Kraft bei einer gegebenen Geschwindigkeit v_0. Veränderbare Geometrien können mit Femlab nur schlecht simuliert werden. Darum wird das Problem in etwas vereinfachter Geometrie untersucht.



Betrachtet wird die feste Geometrie wie rechts skizziert. Am linken und rechten Rand herrscht eine Kolbenströmung mit v_0. Am oberen und unteren Rand ist eine Geschwindigkeitsrandbedingung. Die tangentiale Komponente ist v_0, die normale Geschwindigkeit ist 0. An den Rändern des Kolbens herrscht eine No–Slip–Randbedingung. Auch der Druck muss noch an einer Stelle fixiert werden. Dazu wird in Femlab in den Point–Settings eine Constraint definiert.



Lösen Sie das Problem für die folgenden geometrischen Größen: $L = 16$ mm, $l = 4$ mm, $r_i = 2.5$ mm, $r_a = 3$ mm als rotationssymmetrisches Problem.

```
New (Axial symmetry (2D))->Chemical Engineering Module->Momentum Balance->
   Imcompressible Navier Stokes->Steady-state analysis
```

Vergessen Sie nicht, zusätzlich in einem Punkt den Druck zu fixieren: `Physics->Point Settings`

Berechnen Sie die Druckkraft und die Scherkräfte, die auf den Kolben wirken bei den Geschwindigkeiten

a) $v_0 = 0.1$ m/s

b) $v_0 = 1$ m/s