1 Aufgaben zum Kapitel Wärmeleitung

1.2 Die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

Review–Aufgaben

Aufgabe 1. Wie lautet die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung? Erklären Sie die Parameter, die in der Gleichung vorkommen.

Aufgabe 2. Welche Arten von Randbedingungen haben wir kennengelernt?

Aufgabe 3. Worauf ist bei der numerischen Lösung zu achten, wenn Strahlungsrandbedingungen verwendet werden?

Aufgabe 4. Wie berechnet sich die thermische Relaxationszeit?

Übungsaufgaben

Aufgabe 5. Berechnen Sie (von Hand) die Löungen der stationären Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{d}{dx}(k\frac{dT}{dx}) = Q$$

für das Intervall $x \in [0, 1]$ für folgende Situationen:

a) $k = 1$, $T(0) = 0$, $T(1) = 100$, $Q = 0$

b) $k = 1$, $T(0) = 0$, $T'(1) = 0$, $Q = 0$

c) $k = 1$, $T(0) = 0$, $T'(1) = 0$, $Q = 1$

d) $k = 1$ für $0 \leq x \leq 0.5$, $k = 10$ für $0.5 < x \leq 1$, $T(0) = 0$, $T(1) = 10$, $Q = 0$

Aufgabe 6. Leiten Sie die Wärmeleitungsgleichung her für den Fall, dass der Wärmeleitungskoeffizient k nicht konstant, sondern eine Funktion der Ortsvariablen ist, also $k = k(x)$.

Aufgabe 7. *(Woher kommt die thermische Relaxationszeit?)*

Gesucht ist eine „langwellige“ (bezogen auf den Ort) Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0, \quad x \in [0, L]$$

in der Form $T(t,x) = f(t)\sin(\pi x/L)$. Bestimmen Sie $f(t)$ und erklären Sie damit, welche Bedeutung die thermische Relaxationszeit

$$\tau = \frac{L^2 \rho C}{k}$$

hat.

Aufgabe 8. Gesucht ist die Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0, \quad x \in [0, 1]$$

mit den Randwerten $T(t,0) = 0$ und $T(t,1) = 1$ und dem Anfagngswert $T(0,x) = T_0(x) = x^2$.

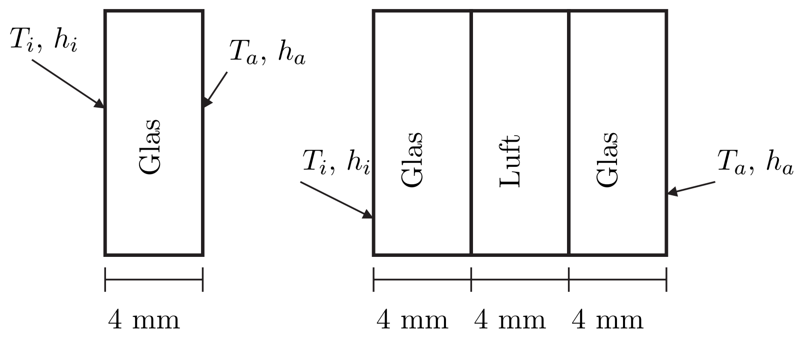
Hinweis: Verwenden Sie folgenden Ansatz:

$$T(t,x) = f(x) + g(t,x),$$

wobei $f(x)$ eine Lösung der stationären Gleichung ist, die die Randbedingungen erfüllt, und $g(t,x)$ erfüllt homogene Randbedingungen (Ansatz als Fourier–Reihe).

Modellierung und Simulation

Aufgabe 9. Vergleichen Sie die Wärmeleitung durch ein einfach verglastes Fenster mit der Wärmeleitung durch ein doppelt verglastes Fenster. Lösen Sie das Problem als eindimensionales Wärmeleitungsproblem.



Die Wärmeleitkoeffizienten von Glas und Luft betragen $k_{\text{Luft}} = 0.024\text{W/mK}$ und $k_{\text{Glas}} = 1.16\text{W/mK}$. Die Randbedingungen sind durch die Raumtemperatur $T_i = 18°\text{C}$, die Außentemperatur $T_a = -10°\text{C}$ und durch die Wärmeübergangskoeffizienten bestimmt. An der Innenseite gilt $h_i = 7\text{W/m}^2\text{K}$. Da an der Außenseite der konvektive Wärmetransport durch die Luftbewegung größer ist, wird dort $h_a = 15\text{W/m}^2\text{K}$ angenommen. Vergleichen Sie den Temperaturverlauf und den Wärmefluss für beide Fenster. Wie gross ist der Wärmeverlust für die beiden Fenstertypen?

Aufgabe 10. Lösen Sie die Beispiele aus Aufgabe 5 mit Femlab.

Aufgabe 11. Lösen Sie Aufgabe 9 mit Femlab. Hierbei können Sie beide Varianten gleichzeitig lösen. Dazu müssen lediglich beide Geometrien zusammen eingegeben werden.

1.3 Die mehrdimensionale Wärmeleitungsgleichung

Review–Aufgaben

Aufgabe 12. Wie lauten die Formeln für Gradient, Divergenz und den Laplace–Operator in kartesischen Koordinaten?

Aufgabe 13. Wie lautet der Satz von Gauß?

Aufgabe 14. Wie lautet die transiente, wie die stationäre Wärmeleitungsgleichung?

Aufgabe 15. Welche Typen von Randbedingungen gibt es, wie werden sie in Formeln ausgedrückt?

Aufgabe 16. Auf welche Weise werden in der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung (Ortskoordinate x) Wärmeübergänge in y– und z–Richtung als Quellterm formuliert?

Aufgabe 17. Auf welche Weise werden in der zweidimensionalen Wärmeleitungsgleichung (Ortskoordinaten x und y) Wärmeübergänge in z–Richtung als Quellterm formuliert?

Übungsaufgaben

Aufgabe 18. Beweisen Sie mit dem Satz von Gauß folgende Formel (siehe (V.12)) für eine glatte Funktion Φ:

$$\int_A \Phi \mathbf{n}\, dA = \int_V \nabla \Phi\, dV$$

Aufgabe 19. *(Bestätigung des Integralsatzes von Gauß mit einem Beispiel)*

Es sei A das Quadrat mit den Eckpunkten $(0;0)$, $(0;1)$, $(1;0)$ und $(1;1)$, und ∂A sei der Rand mit dem äußeren Normalenvektorfeld $\mathbf{n}$. Das Vektorfeld $\mathbf{v}$ sei gegeben durch

$$\mathbf{v}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \sin y \\ xy \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie den Fluss

$$\Phi = \oint_{\partial A} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, ds$$

durch den Rand sowie

$$\int_A \operatorname{div} \mathbf{v}\, dA$$

und zeigen Sie, dass die beiden Werte gleich sind (was wegen des Integralsatzes von Gauß sowieso bekannt ist).

Aufgabe 20. *(Und wieder der Satz von Gauß, diesmal mit Femlab)*

In dieser Aufgabe soll Femlab „missbraucht“ werden, um das Beispiel aus der letzten Aufgabe nachzurechnen. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Definieren Sie in Femlab das Quadrat als Geometrie.
- Definieren Sie das o.a. Vektorfeld $\mathbf{v}$ als Expresssion (mit `vx` und `vy`).
- `Solve->Update Model`
- Gehen Sie in den Postprocessor. Berechnen Sie mit Subdomain–Integration das Integral

  $$\int_A \operatorname{div} \mathbf{v}\, dA.$$

  Hierzu integrieren Sie `diff(vx,x)+diff(vy,y)`.
- Zum Vergleich berechnen Sie das Randintegral

  $$\oint_{\partial A} \mathbf{v} \cdot\, d\mathbf{s}.$$

  Das geht mit Boundary–Integration des Ausdrucks `nx*vx+ny*vy` (Mit `nx` und `ny` stehen die Komponenten des äußeren Normalenvektors zur Verfügung.)

Modellierung und Simulation

Aufgabe 21. Ein runder Stab mit Radius r, Dichte ρ, spezifischer Wärmekapazität C und Wärmeleitfähigkeit k sei so dünn, dass die Temperatur in ihm als konstant über den Querschnitt angenommen werden kann. Diese Situation führt — bei einem thermisch isolierten Stab — zur eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung, die bereits in der Vorlesung hergeleitet wurde. Nun wird angenommen, dass der Stab nicht isoliert ist, und abhängig von der jeweiligen Temperatur ein Wärmefluss über die Randfläche stattfindet. Es gelte für diesen Wärmefluss q (in [W/m^2]) in den Stab hinein:

$$q = h(T_\infty - T),$$

wobei T die jeweilige Temperatur im Stab ist, T_∞ sei die Temperatur der Umgebung und h sei der Wärmeübergangskoeffizient (in [W/(m^{2}K)]).

a) Leiten Sie für diesen Fall eine Wärmeleitungsgleichung her, indem Sie eine Energiebilanz in einem infinitesimal kleinen Stück des Stabs betrachten.

b) Vergleichen Sie diese Gleichung mit der entsprechenden Gleichung in den Subdomain–Settings in Femlab. Wie geht dort der Parameter h ein?

Aufgabe 22. Eine Platte in der x–y–Ebene mit der Dicke d sei so dünn, dass die Temperaturverteilung in ihr durch eine zweidimensionale Wärmeleitungsgleichung beschrieben werden kann. Es wird also angenommen, dass die Temperatur über die Dicke d konstant ist. Wenn die Platte oben und unten isoliert ist, dann gilt die zweidimensionale Wärmeleitungsgleichung, die bereits in der Vorlesung hergeleitet wurde. Im folgenden soll angenommen werden, dass die untere Seite der Platte thermisch isoliert ist, die obere Seite ist jedoch der Umgebung ausgesetzt. An dieser Oberseite soll gelten, dass ein Wärmefluss q (in [W/m^2]) in die Platte hineingeht, der proportional zur Temperaturdifferenz zwischen der Temperatur T in der Platte und der Umgebungstemperatur T_∞ ist. Es gelte also:

$$q = h(T_\infty - T).$$

Dabei sei h der Wärmeübergangskoeffizient (in [W/(m^{2}K)]).

a) Leiten Sie für diesen Fall eine Wärmeleitungsgleichung für die Platte her, indem Sie eine Energiebilanz in einem infinitesimal kleinen Stück der Platte betrachten. Die Materialparameter seien wie in der letzten Aufgabe bezeichnet.

b) Vergleichen Sie diese Gleichung mit der entsprechenden Gleichung in den Subdomain–Settings in Femlab. Wie geht dort der Parameter h ein?

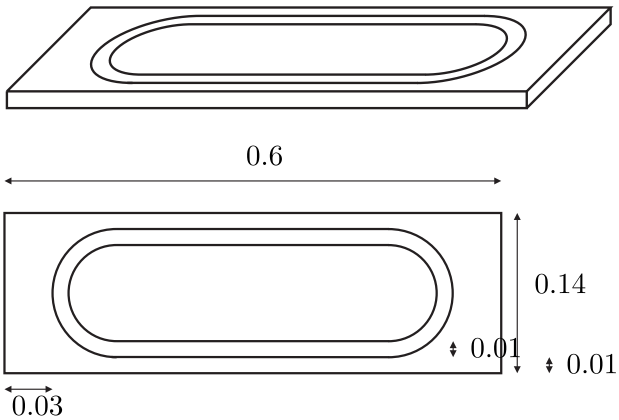
Aufgabe 23. Beim Sputter–Prozess wird ein Plasma erzeugt, das mit einem elektrischen und einem magnetischem Feld auf eine ovale Bahn (dem so genannten Race–Track) über dem Silizium–Target gezwungen wird. Teilchen dieses Plasmas lösen durch das Stoßen auf das Target dort Teilchen heraus, die dann für die Beschichtung notwendig sind.

In dieser Aufgabe interessieren wir uns für die Temperaturverteilung im Target. Hierfür machen wir folgende Annahmen:

- Entlang von dem ovalförmigen Race–Track findet ein Wärmefluss q_{in} in das Target statt (Neumannbedingung).
- Am Rest der Target–Oberfläche gilt das Newtonsche Abkühlungsgesetz mit T_{Luft} und h_{Luft}.
- An der Unterseite ist das Target mit Wasser gekühlt. Hierfür gibt es die Parameter T_{Wasser} und h_{Wasser}.
- An den seitlichen Randflächen wird angenommen, dass kein Wärmefluss (homogene Neumannbedingung) stattfindet.

Die Geometrie finden Sie in den Skizzen (in m), die restlichen Parameter in der Tabelle.

q_{in}	300000 W/m^3
h_{Luft}	5 W/m^{2}K
T_{Wasser}	33° C
h_{Wasser}	10000 W/m^{2}K
d (Dicke des Targets)	0.01 m
Materialparameter Silizium	
k	90 W/mK
ρ	2330 kg/m^3
C	272 W/kg K



a) Bestimmen Sie die Temperaturverteilung im Target mit Femlab. Aus Symmetriegründen genügt es, nur ein Viertel des Targets zu simulieren.

b) Überprüfen Sie Ihre Resultate durch ein Untersuchen der Energiebilanz: Welche Wärmeleistung dringt insgesamt in das Viertel des Targets ein, wieviel geht in der Luft und wieviel im Wasser verloren?

Aufgabe 24. Nun soll das Target der letzten Aufgabe in einer zweidimensionalen Approximation (im Stil der Aufgabe 22 formuliert) werden.

a) Formulieren Sie die zweidimensionale Wärmeleitungsgleichung für diesen Fall, d.h. der Wärme–Eintrag und die Kühlung in der Luft müssen in die rechte Seite der Differentialgleichung gepackt werden.

b) Lösen Sie das Problem als zweidimensionales Problem in Femlab.

c) Vergleichen Sie Ihr Resultat mit den Ergebnissen der dreidimensionalen Simulation.

d) Insbesondere könnte interessant sein, das zweidimensionale Ergebnis zu vergleichen mit dem dreidimensionalen Ergebnis, das über die Höhe gemittelt wurde.

1.4 Convection–Diffusion–Equation

Review–Aufgaben

Aufgabe 25. Was ist die materialle Ableitung?

Aufgabe 26. Wie lautet die Gleichung für die Masseerhaltung (Kontinuitätsgleichung)?

Aufgabe 27. Wie lautet die Convection–Diffusion–Equation?

Aufgabe 28. Wie lautet die dreidimensionale transiente Wärmeleitungsgleichung mit Konvektion?

Aufgabe 29. Wie lautet die Randbedingung, so dass Wärme nur durch Konvektion, nicht aber durch Diffusion das Gebiet verlässt?

Übungsaufgaben

Aufgabe 30. In der Tabelle stehen einige Grössen eines typischen Wärmeleitungs– und Strömungsproblems.

Größe	Bedeutung	Einheit
L	typische Länge	m
U	typische Geschwindigkeit	m/s
ρ	Dichte	kg/m^3
k	Wärmeleitkoeffizient	W/(mK)
C	spezifische Wärmekapazität	J/(kg K)
η	Viskosität	Pa s

Damit lassen sich die folgenden dimensionslosen Kenngrößen formulieren:

$$\text{Reynolds–Zahl:} \qquad Re = \frac{\rho U L}{\eta}$$

$$\text{Prandtl–Zahl:} \qquad Pr = \frac{\eta C}{k}$$

$$\text{Peclet–Zahl:} \qquad Pe = Re \cdot Pr = \frac{\rho U L C}{k}$$

Zeigen Sie:

a) Alle oben angeführten Kennzahlen haben keine Einheit.

b) Die Peclet–Zahl kann interpretiert werden als

$$Pe = \frac{\tau_{\text{Convection}}}{\tau_{\text{Conduction}}},$$

wobei $\tau_{\text{Conduction}}$ eine typische Zeitskala der Wärmeleitung und $\tau_{\text{Convection}}$ eine typische Zeitskala der Konduktion ist.

Aufgabe 31. Simulieren Sie mit Femlab die transiente eindimensionale Wärmeleitungsgleichung mit Konvektion auf dem Gebiet $0 \leq x \leq 1$. Wählen Sie als Subdomain–Parameter $C = 1$, $k = 1$ $u = 1$. Als Randbedingung wählen Sie an beiden Enden „conductive flux“. Als Anfangswert gelte die Temperaturverteilung $T(0, x) = T_0(x) = \sin(\pi x)$. Untersuchen Sie folgende Fälle:

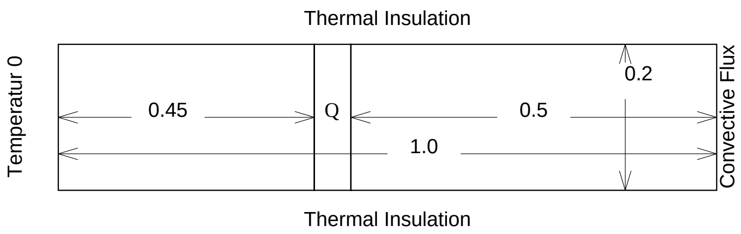
a) $\rho = 1$

b) $\rho = 10$

c) $\rho = 50$

Schätzen Sie jeweils die Peclet–Zahl und führen Sie jeweils eine transiente Simulation für $t \in [0, 1]$ durch. Beobachten Sie, wie sich die Temperatur ändert.

Aufgabe 32. Wir betrachten eine laminare Strömung durch einen Kanal. Das Strömungsprofil ist gegeben durch die Strömungsgeschwindigkeit $u(y) = U_0 \cdot 100 \cdot y(0.2 - y)$ (die Unterkante des Kanals liegt auf der x–Achse). Verwenden Sie die Materialparameter $\rho = 1$, $C = 1$, $k = 1$. Zusätzlich ist im inneren Rechteck eine Wärmezufuhr von $Q = 1000$.



Simulieren Sie die Fälle

a) $U_0 = 0$

b) $U_0 = 10$

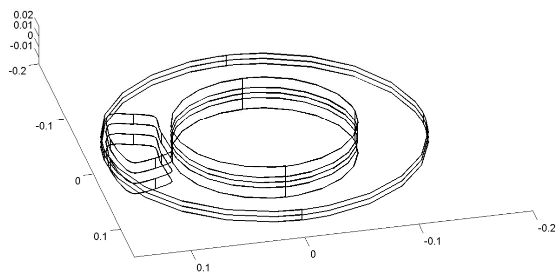
c) $U_0 = 1000$

Schätzen Sie für jeden Fall die Peclet–Zahl ab und betrachten Sie den Temperaturverlauf im stationären Fall.

Modellierung und Simulation

Aufgabe 33.

Am Beispiel einer Scheibenbremse sollen die Wärmeleitungsgleichungen in 2D und 3D zusammen mit Wärmetransport durch Konvektion betrachtet werden. Von Beginn an beschränken wir uns auf ein halbes Modell der Bremsscheibe mit nur einem Klotz. Die halbe Scheibe hat eine Dicke von 18 mm (innen) und 8 mm (außen). Der Radius beträgt 14 cm (aussen) und 8 cm (innen). Der Bremsklotz hat eine Dicke von 1 cm. Die Geometrie des Bremsklotzes ist im File `bremsklotz.dxf` abgelegt (kann in Femlab importiert werden). Die Materialwerte von Bremsklotz und Scheibe sind in der Tabelle angegeben.



	Scheibe	Klotz
ρ (kg/m^3)	7870	2000
C (J/(kg K))	449	935
k (W/(mK))	82	8.7

Ein PKW mit der Masse $m = 1000$ kg bremst mit einer konstanten Beschleunigung a innerhalb von 10 s ($t \in [0, 10]$) von 90 km/h bis zum Stillstand ab.

a) Berechnen Sie $v(t)$ in SI–Einheiten.

b) Berechnen Sie die momentane kinetische Energie $E(t)$ des Fahrzeugs.

c) Unter der Annahme, dass die gesamte kinetische Energie als Reibungswärme in den Bremsscheiben abgegeben wird, bestimmen Sie den totalen Wärmefluss $Q(t)$ (W), der in die Bremsscheiben eingebracht wird.

d) Importieren Sie die Geometrie des Bremsklotzes in Femlab und berechnen Sie mit Femlab die Berührungsfläche (`Postprocessing->Boundary Integration`).

e) Unter der Annahme, dass die Reibungswärme durch einen örtlich konstanten Wärmefluss q unter den Bremsklötzen in das System eingebracht wird, berechne man $q(t)$ (W/m^2).

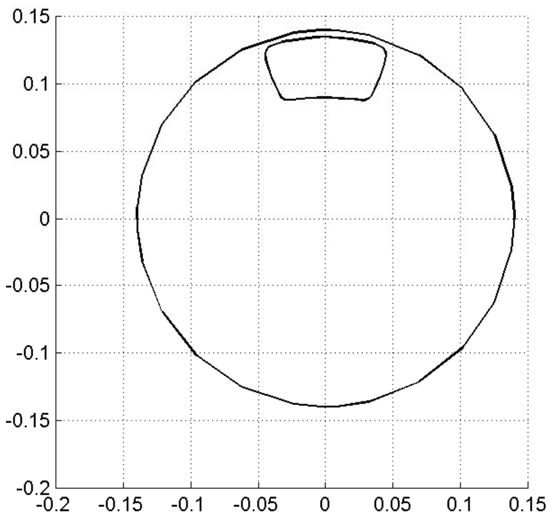
f) Berechnen Sie hieraus die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ der Bremsscheiben, wenn der Radius der Räder 0.4 m ist.

g) Berechnen Sie nun den Geschwindigkeitsvektor eines Punktes (x, y) auf der Scheibe.

h) Für die Simulation ist es von Vorteil, wenn die Bewegung der Scheibe nicht in der Geometrie berücksichtigt wird (das FE-Netz bleibt also fest). Stattdessen wird ein konvektiver Wärmetransport innerhalb der Scheibe angenommen. Formulieren Sie die Wärmeleitungsgleichung für den Bremsklotz (kein Konvektionsterm) und die Scheibe (mit Konvektionsterm).

Das Problem soll im folgenden in einer zweidimensionalen Idealisierung formuliert werden. Hierzu wird angenommen:

- Kein Wärmefluss in z–Richtung.
- Die (halbe) Scheibe ist überall 0.8 cm dick.
- Die Wärmeleitung im Bremsklotz wird ignoriert.
- Als **Randbedingung** wird Newtonsche Abkühlung angenommen mit $T_{\text{Luft}} = 20°\text{C}$ und $h = 50\text{W}/(\text{m}^2\text{K})$.



i) Wie lauten die Differentialgleichung (Konvektionsterm nicht vergessen) und Randbedingungen unter der Annahme, dass in z–Richtung die Scheibe thermisch isoliert ist. Hierbei ist die Reibungswärme als Wärmequelle $Q(t)$ im Bereich des Klotzes anzusehen.

j) Formulieren Sie nun die Differentialgleichung, wenn berücksichtigt wird, dass an der Oberseite der Platte auch das Newtonsche Abkühlungsgesetz gilt. Dies wird dann — wie in einer früheren Übungsaufgabe hergeleitet — als Quellterm formuliert.

k) Lösen Sie das zweidimensionale zeitabhängige Problem mit Femlab. Wählen Sie als Timestepping

   - `linspace(0,0.3,30)`
   - `linspace(0,10,30)`

1.5 Andere Koordinatensysteme

Review–Aufgaben

Aufgabe 34. Wie sind Zylinderkoorindaten definiert?

Aufgabe 35. Wie lauten Gardient, Divergenz und der Laplace–Operator in Zylinderkoordinaten?

Aufgabe 36. Wie lautet die Wärmeleitungsgleichung in Zylinderkoordinaten?

Übungsaufgaben

Aufgabe 37. Formulieren Sie die zweidimensionale Wärmeleitungsgleichung in Polarkoordinaten. Starten Sie Femlab mit

```
New->Axial Symmetry (2D)
Femlab->Heat Transfer->Conduction->Transient Analysis
```

Erzeugen Sie irgendeine Geometrie. Bringen Die Femlab in die „Coefficient form“ durch

```
Physics->Model Settings...
Solution Form->Coefficient
```

Schauen Sie unter

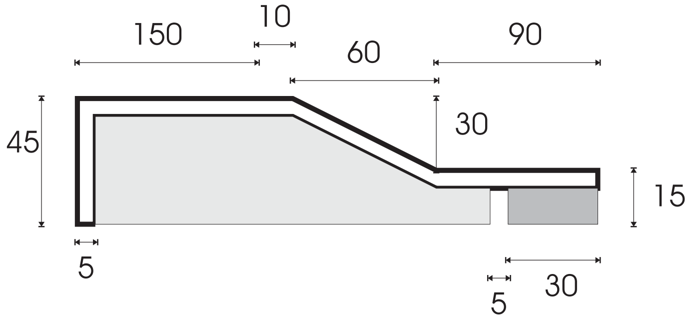
```
Physics->Equation System->Subdomain Settings...
```

wie diese Gleichung in Femlab definiert ist, und vergleichen Sie diesen Ausdruck mit der Wärmeleitungsgleichung.

Modellierung und Simulation

Aufgabe 38. Wir betrachten das Kühlen einer Flasche Wein (Materialdaten der Einfachheit halber wie Wasser) im Eiswasser. Die Geometrie einer halben Flasche ist rechts skizziert.

Die Wandstärke betragt 5 mm, die totale Höhe 31 cm, nach 16 cm beginnt der Knick, der Hals hat einen Aussendurchmesser von 3 cm und ist 9 cm lang. Die Flasche ist mit einem Korken verschlossem (Länge 3 cm), und zwischen Korken und Wein ist noch eine Luftschicht von 5 mm.



Die Materialdaten von Wasser, Glas, Luft und Kork sind in der Tabelle angegeben. Als Randbedingungen gelten: Der Boden und der Flaschenkörper stehen bis zur Höhe 15 cm im Eiswasser, das heisst die Aussentemperatur ist 0°C. Für den Rest des Randes gilt Newton's Abkühlungsgesetzt mit Außentemperatur $T_\infty = 20°$C und dem Wärmeübergangskoeffizient $h = 5$W/(m^2 K).

	ρ in kg/m^3	c in J/(kg K)	k in W/(m K)
Wasser	1000	4200	0.598
Glas	2890	780	0.8
Luft	1.29	1005	0.024
Kork	190	1880	0.041

a) Lösen sie das beschriebene Problem als dreidiemnsionales stationäres Wärmeleitungsproblem (verwenden Sie nicht die Rotationssymmetrie in Femlab). Gesucht ist also die Temperaturverteilung nach „unendlich langer" Zeit. Übrigens: Aus Symmetriegründen genügt es, nur einen Sektor der Flasche zu modellieren (z.B. ein Viertel).

b) Bestimmen Sie die Durchschnittstemperatur des Weins, also

$$\frac{\int_{\text{Wasser}} T dV}{\int_{\text{Wasser}} 1 dV}$$

Tipp:

`Postprocessing->Subdomain Integration`

c) Lösen Sie das Problem der Weinflasche als zeitabhängiges Problem. Die Anfangstemperatur des Weins und der Flasche (und Luft und Korken) beträgt 20°C. Timestepping ist `0:900:18000`. Bestimmen Sie zu den berechneten Zeitpunkten die Durchschnittstemperatur des Weins. Tipp: Definieren Sie unter

`Options->Integration Coupling Variables->Subdomain Variables`

eine neue Variable, die das Integral von T über dem Wein–Subdomain beschreibt. Später:

`Postprocessing->Domain Plot Parameters->Point`

d) Lösen Sie nun zum Vergleich das stationäre und das transiente Problem unter Ausnutzung der Symmetrie. Beginnen Sie mit Femlab wie folgt:

```
File->New->Axial Symmetrie (2D)
Femlab->Heat Transfer->Conduction
```

Vorsicht! Die unabhängigen Variablen heißen nun r, z. Also muss die Flasche **senkrecht** modelliert werden!