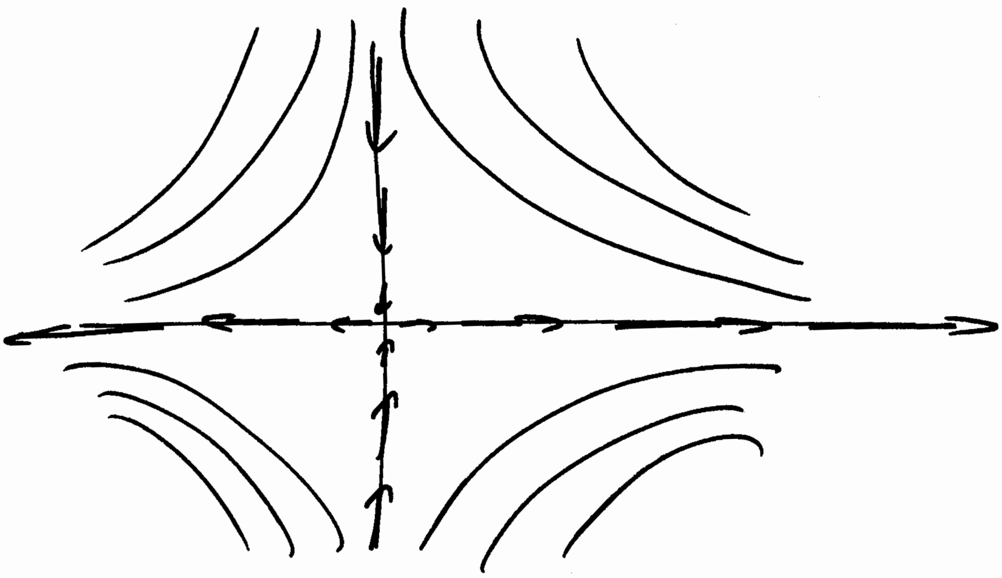
Aufgabe 5

$u = \alpha x, \quad v = -\alpha y, \quad w = 0, \quad \alpha > 0$



$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + (u \cdot \nabla) c$$

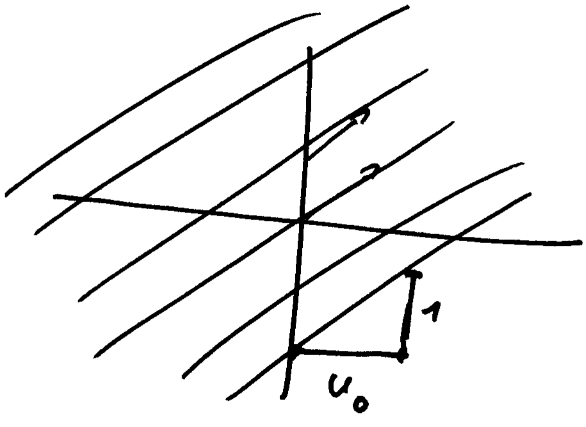
$$= -\alpha \beta x^2 y e^{-\alpha t} + (\alpha x)(2\beta x y e^{-\alpha t}) + (-\alpha y)(\beta x^2 e^{-\alpha t})$$

$= \underline{\underline{0}}$, also keine Änderung mit der Zeit.

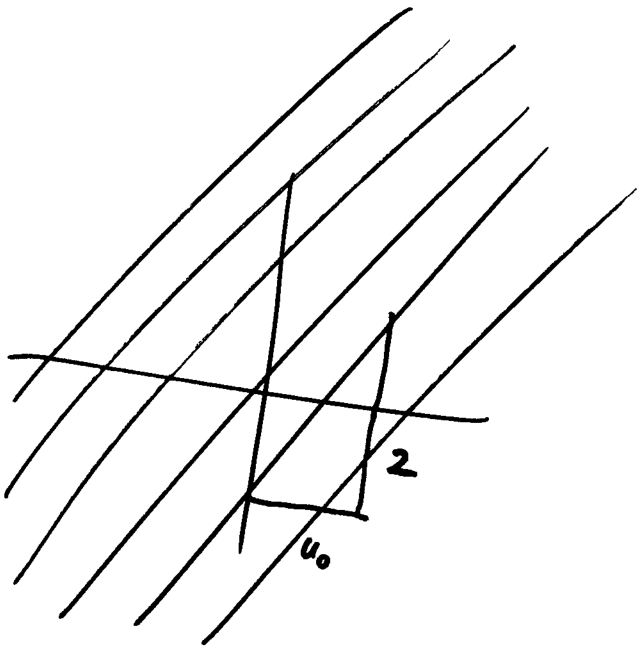
$$u = u_0, \quad v = kt, \quad w = 0$$

a)

<u>$t=1$</u>



<u>$t=2$</u>



Man sieht leicht:

$$x(s) = u_0 s$$
$$y(s) = kts$$

erfüllt

$$\frac{dx/ds}{u} = \frac{dy/ds}{v}.$$

b) Fluidteilchen:

$$\dot{x}(t) = u_0$$
$$\dot{y}(t) = kt$$

hat Lösungen

$$x(t) = u_0 t + C_1$$
$$y(t) = \frac{1}{2} k t^2 + C_2$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2} \frac{k}{u_0^2} (C_1 - x)^2 + C_2 \, ,$$

also Parabel.

Aufgabe 12

$$\nabla \times u = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} w - \frac{\partial}{\partial z} v \\ \frac{\partial}{\partial z} u - \frac{\partial}{\partial x} w \\ \frac{\partial}{\partial x} v - \frac{\partial}{\partial y} u \end{pmatrix}$$

$$(\nabla \times u) \times u = \begin{pmatrix} w\left(\frac{\partial}{\partial z} u - \frac{\partial}{\partial x} w\right) - v\left(\frac{\partial}{\partial x} v - \frac{\partial}{\partial y} u\right) \\ u\left(\frac{\partial}{\partial x} v - \frac{\partial}{\partial y} u\right) - w\left(\frac{\partial}{\partial y} w - \frac{\partial}{\partial z} v\right) \\ v\left(\frac{\partial}{\partial y} w - \frac{\partial}{\partial z} v\right) - u\left(\frac{\partial}{\partial z} u - \frac{\partial}{\partial x} w\right) \end{pmatrix}$$

$$\nabla\left(\frac{1}{2} u^2\right) = \nabla\left(\frac{1}{2}\left(u^2 + v^2 + w^2\right)\right)$$

$$= \begin{pmatrix} u \frac{\partial}{\partial x} u + v \frac{\partial}{\partial x} v + w \frac{\partial}{\partial x} w \\ u \frac{\partial}{\partial y} u + v \frac{\partial}{\partial y} v + w \frac{\partial}{\partial y} w \\ u \frac{\partial}{\partial z} u + v \frac{\partial}{\partial z} v + w \frac{\partial}{\partial z} w \end{pmatrix}$$

$$(u \cdot \nabla) u = \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}\right) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u \frac{\partial}{\partial x} u + v \frac{\partial}{\partial y} u + w \frac{\partial}{\partial z} u \\ u \frac{\partial}{\partial x} v + v \frac{\partial}{\partial y} v + w \frac{\partial}{\partial z} v \\ u \frac{\partial}{\partial x} w + v \frac{\partial}{\partial y} w + w \frac{\partial}{\partial z} w \end{pmatrix}$$

Durch Komponentenvergleich sieht man

$$(u \cdot \nabla) u = (\nabla \times u) \times u + \nabla\left(\frac{1}{2} u^2\right)$$

a) Die Strömung ist nicht rotationsfrei.

Deswegen weiß man zwar, dass

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}u^2 + gz$$

konstant ist auf jeder Stromlinie,

aber man weiß nicht, dass der Wert

auf allen Stromlinien gleich ist.

Darum ist die Argumentation falsch.

b)

Euler-Gleichung

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + g$$

In Komponenten

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g$$

Mit $u = \begin{pmatrix} -\Omega y \\ \Omega x \\ 0 \end{pmatrix}$ (unabhängig von t) folgt also

$$\Omega x(-\Omega) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$-\Omega y(\Omega) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g$$

Integration liefert

$$p(x,y,z) = p_0 + \rho\Omega^2\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2\right) - \rho g z$$

$p = \text{const}$ heißt dann

$$\rho g z = p_0 - \text{const} + \rho\Omega^2\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2\right)$$

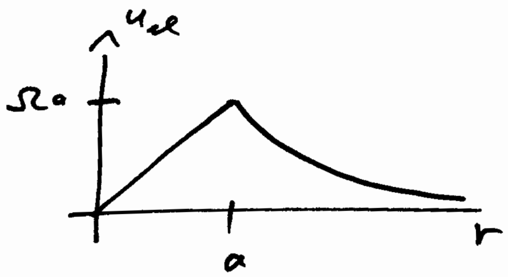
Also

$$z = \text{const} + \frac{\Omega^2}{2g}(x^2 + y^2)$$

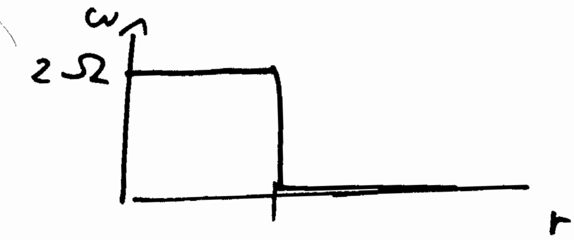
Aufgabe 14

Rankine vortex: $u_\theta = \begin{cases} \Omega r\,; & r < a \\ \dfrac{\Omega a^2}{r}\,; & r > a \end{cases}$

a) $u_r = u_z = 0$



Wir wissen bereits: $\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$ mit



b)

Vorticity equation:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \omega \times u = -\nabla H \quad \text{mit} \quad H = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}u^2 + gz$$

Bei uns gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

$$\omega \times u = -e_r \begin{cases} 2\Omega^2 r\,; & r < a \\ 0\,; & r > a \end{cases}$$

und $u^2 = \begin{cases} \Omega^2 r^2 & r < a \\ \dfrac{\Omega^2 a^4}{r^2} & r > a \end{cases}$

Also ist

$$\nabla H = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \begin{cases} \Omega^2 r \\ -\dfrac{\Omega^2 a^4}{r^3} \end{cases}\right] e_r + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g\right] e_z$$

$\Longrightarrow$

Für $r<a$:

$$-2\Omega^2 r = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \Omega^2 r$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 3\Omega^2 \rho r$$

Für $r>a$:

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\Omega^2 a^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\Omega^2 \rho a^4}{r^3}$$

\# Für festes z folgt damit:

$r<a$: $\quad p = p_0 + \frac{3}{2}\Omega^2 \rho r^2 - \rho g z$

$r>a$: $\quad p = C + \frac{\Omega^2 \rho a^4}{2}\frac{1}{r^2} - \rho g z$

Da p bei $r=a$ stetig ist, folgt:

$$p_0 + \frac{3}{2}\Omega^2 \rho a^2 = C + \frac{\Omega^2 \rho a^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad C = p_0 + \Omega^2 \rho a^2$$

Also folgt insgesamt

$$p(r,z) = p_0 - \rho g z + \begin{cases} \frac{3}{2}\Omega^2 \rho r^2 & r < a \\ \Omega^2 \rho a^2 + \frac{\Omega^2 \rho a^4}{2r^2} & r > a \end{cases}$$

D.h.: Für $r=0$: $p(0,z) = p_0 - \rho g z$

Für $r=\infty$: $p(\infty,z) = p_0 - \rho g z + \Omega^2 \rho a^2$

c)

Für freie Oberfläche ist $p = \text{const}$, d.h.

$$\rho g\, z(r=0) = \rho g\, z(r=\infty) - \Omega^2 \rho a^2$$

$$z(r=\infty) = z(r=0) + \frac{\Omega^2 \cancel{\rho} a^2}{g}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{1}{2}\rho u^2 = \rho u\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}u\right)$$

$$\underset{\text{Euler}}{=} \rho u\cdot\left(-\frac{1}{\rho}\nabla p + g - (u\cdot\nabla)u\right)$$

$$= -u\cdot\left(\nabla p + \rho\nabla\chi\right) - \rho u\cdot\left((u\cdot\nabla)u\right) \qquad (1)$$

Andererseits folgt mit der Produktregel

$$\nabla\cdot\left(\left(p+\rho\chi+\frac{1}{2}\rho u^2\right)u\right)$$

$$= u\cdot\nabla\left(p+\rho\chi+\frac{1}{2}\rho u^2\right) + \left(p+\rho\chi+\frac{1}{2}\rho u^2\right)\underbrace{\nabla\cdot u}_{=0}$$

$$= u\cdot\left(\nabla p+\rho\nabla\chi\right) + \rho u\cdot\frac{1}{2}\nabla u^2$$

$$= u\cdot\left(\nabla p+\rho\nabla\chi\right) + \rho u\cdot(u\cdot\nabla)u \qquad (2)$$

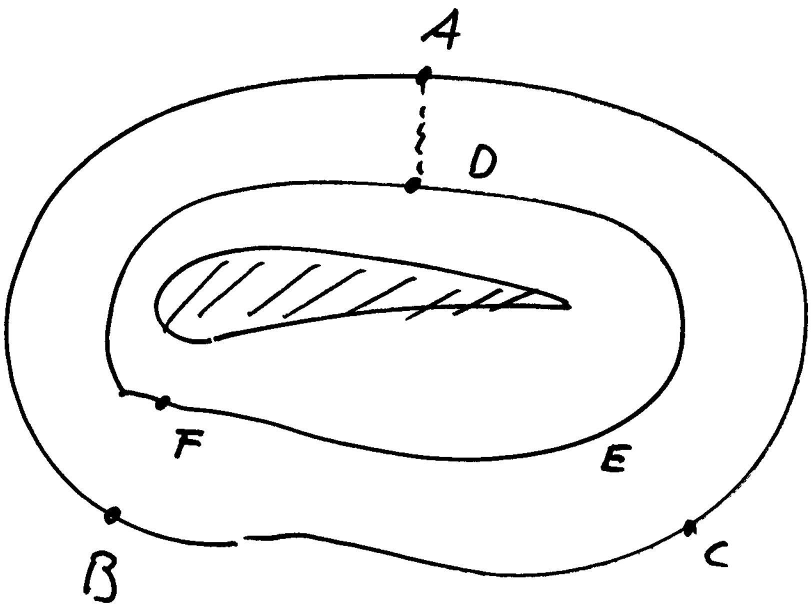
Aus (1) und (2) folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{1}{2}\rho u^2 = -\nabla\cdot\left[\left(p+\rho\chi+\frac{1}{2}\rho u^2\right)u\right]$$

Integrieren über V und dem Satz von Gauß folgt

$$\frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{2}\rho u^2\,dV = -\int_A \left(p+\rho\chi+\frac{1}{2}\rho u^2\right)u\cdot n\,dA$$

Aufgabe 19



Fur die Zirkulation im Gebiet

ABCADEFDA gilt, da $\nabla \wedge u = 0$

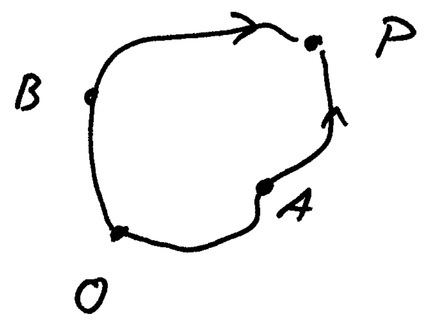
$$\oint_{ABCADEFDA} u \cdot ds = 0$$

Also folgt

$$\oint_{ABCA} u \cdot ds = \oint_{DFED} u \cdot ds$$

Aufgabe 20

a)



Da u rotationsfrei ist, folgt

$$\oint_{OAPBA} u \cdot ds = 0$$

$$\Rightarrow \int_{OAP} u \cdot ds = \int_{OBP} u \cdot ds$$

b) analoges Argument wie bei a) mit dem Satz von Gauß

(inkompressibel $\Rightarrow \nabla \cdot u = 0$)

Aufgabe 21

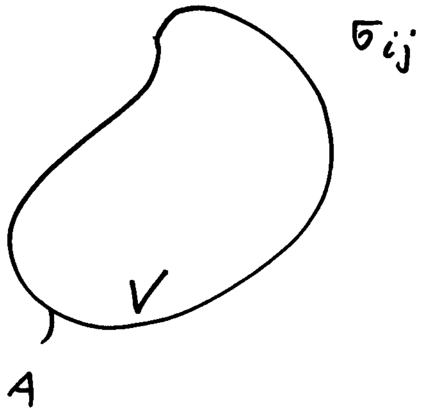
$$\nabla \times u = 0, \quad \nabla \cdot u = 0$$

nachrechnen, z.B mit Darstellung von $\nabla\cdot$ und $\nabla\times$ in Zylinderkoordinaten

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \varphi$$

Aufgabe 30



$p \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$

$$F_z = \int_A \sigma_{3j}\, n_j \, dA - \int_A p\, \mathbf{n} \, dA - \int_V \rho g \, dV$$

$$= \int_V \cancel{\nabla}\, \sigma_{3j,j} \, dV - \int_V \nabla p \, dV - \int_V \rho g \, dV$$

Alle Komponenten:

$$\mathbf{F} = \int_V \nabla \cdot \sigma - \nabla p + \rho\, \mathbf{g} \, dV$$

Wenn $u = \begin{pmatrix} u(y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist die Gln $\nabla \cdot u$ automatisch erfüllt.

Von der Impulserhaltung bleibt die erste Komponente:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y}.$$

Mit anderen Worten

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y} = -\frac{K}{\eta}$$

$$\Rightarrow \quad u(y) = -\frac{1}{2}\frac{K}{\eta} y^2 + C_1 y + C_2$$

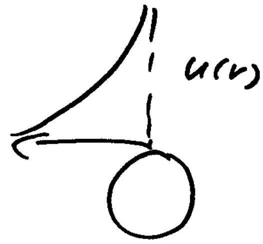
Randbedingungen:

$$0 = u(0) = \underline{C_2}$$

$$U = u(h) = -\frac{1}{2}\frac{K}{\eta} h^2 + C_1 h \quad \Rightarrow \quad \underline{C_1 = \frac{U}{h} + \frac{1}{2}\frac{K}{\eta} h}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{u(y) = -\frac{1}{2}\frac{K}{\eta} h^2 + \left(\frac{U}{h} + \frac{1}{2}\frac{K}{\eta} h\right) y}$$

Aufgabe 32



Es ist $u = \begin{pmatrix}0\\ u_\varphi(r)\\ 0\end{pmatrix}$ und $p = p(r)$

Von der NS-Gln in Zylinderkoordinaten bleibt

$$-\frac{1}{r}u_\varphi^2 = -\frac{\partial p}{\partial r} \qquad (1)$$

$$0 = \eta\left(\Delta u_\varphi - \frac{1}{r^2}u_\varphi\right) \qquad (2)$$

(2) heißt

$$\eta\left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\right) = \eta\frac{1}{r^2}u_\varphi$$

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}u_\varphi = 0$$

Das ist eine gew. lineare DGL 2. Ordnung

Lösungsansatz $u_\varphi(r) = r^n$ (Eulerscher Typ)

$$[n(n-1) + n - 1]\, r^{n-2} = 0 \quad \Rightarrow n^2 = 1$$

$$\Rightarrow \underline{u_\varphi(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r}}$$

Randbedingungen:

$$0 = u_\varphi(r_a) = C_1 r_a + \frac{C_2}{r_a} \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{C_2}{r_a^2}$$

$$\Omega r_i = u_\varphi(r_i) = C_1 r_i + \frac{C_2}{r_i}$$

$$\Rightarrow \quad \Omega = -\frac{C_2}{r_a^2} + \frac{C_2}{r_i^2} = C_2 \left[\frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r_a^2} \right]$$

$$\Rightarrow \quad C_2 = \frac{\Omega}{\frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r_a^2}} = \frac{r_i^2 r_a^2 \Omega}{r_a^2 - r_i^2}$$

$$C_1 = -\frac{r_i^2 \Omega}{r_a^2 - r_i^2}$$

$$\boxed{u(r) = -\frac{r_i^2 \Omega}{r_a^2 - r_i^2} r + \frac{r_i^2 r_a^2 \Omega}{r_a^2 - r_i^2} \frac{1}{r}}$$

Für die Komponente $e_{r\varphi} = e_{\varphi r}$ des Dehnungen-Tensors gilt

$$2\, e_{r\varphi} = r \frac{\partial\left(\frac{1}{r} u_\varphi\right)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi}$$

$$= r \frac{\partial}{\partial r}\left[C_1 + \frac{C_2}{r^2}\right]$$

$$= -2 \frac{C_2}{r^2}$$

Also gilt am inneren Rand

$$e_{r\varphi}\Big|_{r=r_i} = -\frac{C_2}{r_i^2} = -\frac{r_a^2 \Omega}{r_a^2 - r_i^2}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{r\varphi} = \eta\, e_{r\varphi}\Big|_{r=r_i} = -\eta \frac{r_a^2 \Omega}{r_a^2 - r_i^2}$$

Das führt auf ein Drehmoment pro Länge in z von

$$M/\ell = 2\pi r_i\, r_i\, \sigma_{r\varphi}\Big|_{r=r_i} = \underline{-2\pi\eta \frac{r_i^2 r_a^2 \Omega}{r_a^2 - r_i^2}}$$

Wenn für die Geschwindigkeit gilt, dass nur Geschwindigkeiten in z-Richtungen der Form $u(r) = u_z(r)$ vorkommen, dann folgt aus der NS-Gln. in Zylinderkoordinaten, dass

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$$

Von der dritten Gl. bleibt

$$\eta \, \Delta u_z = \frac{\partial p}{\partial z} = -K \text{, also}$$

$$u_z''(r) + \frac{1}{r} u_z'(r) = -\frac{K}{\eta}$$

Dies schreibt man in der Form

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \frac{du_z}{dr}\right) = -\frac{K}{\eta},$$

integriert zweimal, und erhält so die allgemeine Lösung

$$\underline{u_z(r) = -\frac{K}{4\eta} r^2 + C_1 \ln r + C_2}$$

Berücksichtigung der Randbedingung

$$0 = u_z(R_A) = -\frac{K}{4\eta} R_A^2 + C_1 \ln R_A + C_2$$

$$U = u_z(R_I) = -\frac{K}{4\eta} R_I^2 + C_1 \ln R_I + C_2$$

führt auf

$$u_z(r) = \frac{K}{4\eta}\left[R_A^2 - r^2 - \left[R_A^2 - R_I^2 - \frac{4\eta U}{K} \right] \frac{\ln r - \ln R_A}{\ln R_I - \ln R_A} \right]$$

Aufgabe 34

Für den Geschwindigkeitsvektor u gilt $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix}$

mit $w = w(x,y)$ (~~Ko~~ Inkompressibilität)

Aus den ersten beiden Komponenten der NS-Gln folgt

dann $\quad 0 = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$.

Die dritte Komponente liefert

$$\underbrace{\varrho \; w \frac{\partial}{\partial z} w(x,y)}_{=0} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \Delta w$$

Also wird w beschrieben durch die Poisson-Gln

$$\Delta w(x,y) = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Und die Randbedingungen lauten

$$w = 0 \quad \text{auf Rand (haften).}$$